Towards Mathematical Sciences
Vol. 2, No. 1, Spring and Summer 2022, pp. 91–109
DOI.10.22067/tmsj.2022.42639
Expository Article

AN EFFICIENT METHOD FOR SOLVING PARABOLIC INVERSE PROBLEMS WITH OVERSPECIFY CONDITION

SIMIN SHEKARPAZ[1] AND HOSSEIN AZARI[1*]

[1]Department of Mathematics, Faculty of Mathematical Sciences Shahid Beheshti University, Tehran, Iran
s_shekarpaz@sbu.ac.ir
h_azari@sbu.ac.ir

Abstract. In this paper, the parabolic inverse problem with the unknown source parameter is introduced and we solve the problem using the operator splitting method. To solve this problem, it is necessary to determine the source parameter using an overspecify condition, and then by separating the problem and converting it into simpler sub-problems, each sub-problem is solved using Fourier transforms. Also, while providing numerical examples of efficiency and convergence, the proposed method for solving the parabolic inverse problem is shown.

2020 Mathematics Subject Classification. 65M12, 65M32, 80A23
Keywords. Parabolic inverse problem, operator splitting method, Fourier transform
Date: Rceived 4-12-2021 Revised 25-4-2022 Accepted 28-6-2022 Available Online 13-7-2022
*Corresponding author.

دوره ۲، شماره ۱، بهار و تابستان ۱۴۰۱، صص. ۱۰۹–۹۱
DOI. 10.22067/tmsj.2022.42639
مقاله علمی-ترویجی

به سوی علوم ریاضی

یک روش کارا برای حل مسائل معکوس سهموی با شرط اضافی

سیمین شکرپز[1] و حسین آذری[1*]

[1] دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه شهید بهشتی، تهران، ایران
s_shekarpaz@sbu.ac.ir
h_azari@sbu.ac.ir

چکیده. در این مقاله، مسأله معکوس سهموی با پارامتر منبع مجهول معرفی شده و با استفاده از روش جداسازی عملگر به حل مسأله پرداخته‌ایم. برای حل این مسأله، در ابتدا با استفاده از شرط اضافی به تعیین پارامتر منبع پرداخته و سپس با جداسازی مسأله و تبدیل آن به زیرمسائل ساده تر، هر زیر مسأله با استفاده از تبدیلات فوریه حل می‌شود. هم چنین ضمن ارائه مثال‌های عددی کارایی و همگرایی روش پیشنهادی برای حل مسأله معکوس سهموی نشان داده می‌شود.

۱. معرفی

مسائل معکوس از سال‌های دور مورد توجه بوده است. اولین مطالعات درباره‌ی مسائل معکوس و بدوضع به نیمه اول قرن بیستم برمی‌گردد که موضوعات آن ها به مسائلی در فیزیک (مسائل معکوس در نظریه پراکندگی ذرات)، ژئوفیزیک (مسائل معکوس در کاوش‌های الکتریکی، زلزله شناسی و نظریه پتانسیل)، ستاره شناسی و دیگر علوم وابسته بود. در سال‌های اخیر، حوزه کاربرد نظریه‌ی مسائل معکوس تقریبا به همه علومی‌که از روش‌های ریاضی استفاده می‌کنند توسعه داده شده است.

امروزه تعداد زیادی از نشریات علمی به طور مستقیم و یا غیرمستقیم مسائل معکوس و بدوضع را بررسی می‌کنند. مسائل هدایت گرما، در دستهٔ معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی از نوع سهموی جای می‌گیرند.

2020 Mathematics Subject Classification. 65M12, 65M32, 80A23.

کلید واژگان. مسأله معکوس سهموی، روش جداسازی عملگر، تبدیلات فوریه.
تاریخ: دریافت ۱۴۰۰/۹/۱۳ بازنگری ۱۴۰۱/۲/۵ پذیرش ۱۴۰۱/۴/۷ انتشار بر خط ۱۴۰۱/۴/۲۲
*نویسنده مسئول
نحوه ارجاع به این مقاله: س. شکرپز، ح. آذری، یک روش کارا برای حل مسائل معکوس سهموی با شرط اضافی، به سوی علوم ریاضی، ۲ (۱۴۰۱)، شماره ۱، ۱۰۹–۹۱ .

در مسائل مستقیم هدایت گرما، هندسه، شرایط مرزی، شرایط اولیه و خواص ترموفیزیکی معلوم می‌باشند و هدف محاسبه توزیع دما در داخل دامنه جواب می‌باشد. در مسائل معکوس هدایت گرما، یکی یا تعدادی از این اطلاعات نامعلوم بوده و هدف، تخمین آنها با استفاده از اطلاعات اضافی دیگر مانند دماهای اندازه گیری شده در داخل ناحیه جواب میباشد.

به دلیل اهمیت و کاربردهای فراوان مسائل معکوس، در این نوشته به بررسی و حل عددی مسأله معکوس سهموی مربوط به تعیین پارامتر منبع با شرط اضافی می‌پردازیم که به صورت زیر می‌باشد:

$$u_t = u_{xx} + p(t)u(x,t) + f(x,t), \qquad (x,t) \in \Omega_T, \tag{۱.۱}$$

با شرط اولیه

$$u(x,0) = u_0(x), \qquad 0 \leq x \leq 1, \tag{۲.۱}$$

و شرایط مرزی

$$u(0,t) = g_1(t), \qquad u(1,t) = g_2(t), \qquad 0 \leq t \leq T, \tag{۳.۱}$$

و شرط اضافی به یکی از صورت‌های

$$u(x^*,t) = E(t), \qquad 0 \leq x_1 \leq 1, 0 \leq t \leq T, \tag{۴.۱}$$

یا

$$\int_0^l K(x)u(x,t)dx = E(t), \qquad 0 \leq t \leq T, \tag{۵.۱}$$

مفروض است که در آن $\Omega_T = \{(x,t) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq T\}$ و $T > 0$. توابع u_0 ، g_1 ، g_2 ، f ، K و E توابع معلوم، اعداد T و x^* اعداد مثبت مشخص و توابع $u(x,t)$ و $p(t)$ مجهول هستند. به علاوه برای برخی اعداد ثابت $\rho > 0$، هسته $K(x)$ در رابطه زیر صدق می‌کند،

$$\int_0^1 |K(x)|dx \leq \rho. \tag{۶.۱}$$

این نوع معادلات در مطالعات مربوط به فرآیند هدایت گرمایی، قضیه کنترل و نفوذ شیمیایی کاربردهای زیادی دارند (مراجع [۷،۶] را ببینید).

معادله‌ی (۱.۱) برای شرح یک فرآیند انتقال گرما با یک پارامتر منبع استفاده می‌شود و معادله‌ی (۴.۱) درجه‌ی حرارت در نقطه x^* در زمان t را نمایش می‌دهد. هم چنین با استفاده از شرط اضافی (۵.۱) می‌توان انرژی مطلوب $E(t)$ را روی دامنه تعیین کرد.

مثال‌های متفاوت دیگری می‌توان یافت که شامل شرط انتگرالی اضافی می‌شوند، مثلا انتقال گرما در یک لوله نازک در انتشار ذره در پلاسما [۱۰، ۱۹]. برای مشاهده کاربردهای بیشتر از این مسأله و مسائل مشابه مربوط به تعیین پارامتر منبع در فضاهای یک بعدی و n-بعدی به [۸، ۱۵، ۲۴–۲۸] مراجعه کنید.

وجود، یکتایی و وابستگی جواب‌های این مسأله در مراجع [۵، ۷، ۳۳] به اثبات رسیده است.

روش‌های زیادی برای حل عددی این مسأله وجود دارد، مانند تفاضل متناهی، عنصر متناهی، عنصر مرزی، طیفی و حجم متناهی. به عنوان مثال در [۵] روش تفاضل متناهی برای حل این مسأله به کار رفته است اما در مورد تحلیل همگرایی و پایداری صحبتی به میان نیامده است. در مرجع [۹]، روش اویلر پسرو برای حل مسأله با شرایط اضافی (۴.۱) به کار رفته است. هم چنین روش هم‌مکانی سینک برای حل مسأله معکوس با شرایط مرزی غیرموضعی در مرجع [۳۰] به کار رفته است. با استفاده از این روش، مسأله به یک دستگاه از معادلات انتگرالی ولترا تبدیل شده و همگرایی روش اثبات می‌شود.

در مراجع [۴، ۱۸، ۲۱] شرایط وجود و یکتایی برای جواب‌های مسأله معکوس با دو پارامتر مجهول مورد مطالعه قرار گرفته است. هم چنین مسائل مشابه در مراجع [۳، ۱۶، ۱۷، ۲۰، ۲۹، ۳۵، ۳۶] مورد مطالعه قرار گرفته است اما درمورد جواب‌های عددی با شرایط اضافی انتگرالی صحبتی به میان نیامده است.

در این مقاله، از روش‌های جداسازی عملگر برای حل مسأله معکوس سهموی مربوط به تعیین پارامتر منبع با شرط اضافی استفاده می‌شود. در این روش، با جداسازی معادلات پیچیده و تبدیل آن به زیر مسائل ساده‌تر، هر زیرمسأله با روش‌های انتگرال‌گیری مناسب حل می‌شود که با شرایط اولیه به هم مربوط هستند. سپس با ترکیب جواب‌های حاصل از زیر مسائل، جواب مسأله اصلی به دست می‌آید.

اولین نتایج حاصل در مورد جداسازی عملگر، مربوط به روش جداسازی لی- تروتر[۱] (مرجع [۳۲] را ببینید) در سال ۱۹۵۰ می‌باشد. در سال‌های ۱۹۶۰–۱۹۵۰ پیشرفت‌های زیادی در زمینه این روش‌ها در روسیه به وجود آمد که می‌توان از نتایج بدست آمده توسط مارچوک[۲]، یانکو[۳] و سامارسکی[۴] اشاره نمود. اساسی‌ترین کار پژوهشی در این حوزه کاربرد روش‌های لی[۵] و استرانگ[۶] در حل معادلات دیفرانسیل معمولی و جزئی می‌باشد (مراجع [۲، ۲۸، ۳۱، ۳۴] را ببینید). در این روش‌ها، با به‌کارگیری روش‌های مرتبه بالاتر (مراجع [۱۴، ۲۲] را ببینید) خطای جداسازی کاهش می‌یابد. هم چنین با انتخاب مناسب تر تابع تکرار اولیه، روش تکرار بهبودیافته حاصل می‌شود که می‌توان مرتبه دقت را افزایش داد (مرجع [۱۳] را ببینید).

این مقاله شامل بخش های زیر می‌باشد: در بخش دوم پیش نیازهایی را که در طول این مقاله به آن ها نیاز داریم، بیان می‌کنیم. در بخش سوم روش جداسازی عملگر برای حل مسأله معکوس ارائه می‌شود. در بخش چهارم نیز با ارائه مثال‌های عددی کارایی الگوریتم پیشنهادی را برای حل مسأله فوق نشان می دهیم.

---

[۱] Lie-Trotter
[۲] Murchuk
[۳] Yanenko
[۴] Samarski
[۵] Lie
[۶] Strang

۲. پیش نیازها

به منظور تحلیل خطای روش جداسازی عملگر برای حل مسأله (۱.۱)-(۴.۱) یا (۱.۱)-(۳.۱) با شرط اضافی (۵.۱)، نظریه نیم‌گروه های C_0 مورد استفاده قرار می‌گیرد. با به‌کارگیری تبدیلات

$$u(x,t) = y(x,t) + z(x,t),\ \ z(x,t) = g_1(t)(1-x) + g_2(t)x,$$

داریم

$$\begin{aligned} y_t &= y_{xx} + p(t)y + g(x,t), && (x,t)\in\Omega_T, \\ y(x,0) &= y_0(x), && 0\le x\le 1, \\ y(0,t) &= 0, && 0\le t\le T, \\ y(1,t) &= 0, && 0\le t\le T, \end{aligned} \tag{۱.۲}$$

با شرط اضافی به صورت زیر

$$y(x^*,t)dx = \psi(t), \qquad 0\le t\le T, \tag{۲.۲}$$

یا

$$\int_0^1 K(x)y(x,t)dx = \chi(t), \qquad 0\le t\le T, \tag{۳.۲}$$

که در آن

$$g(x,t) = f(x,t) - z_t(x,t) + p(t)z(x,t), \qquad y_0(x) = u_0(x) - z(x,0),$$
$$\psi(t) = E(t) - z(x^*,t), \qquad \chi(t) = E(t) - \int_0^1 K(x)z(x,t)dx.$$

سپس نظریه نیم‌گروه برای مسأله (۱.۲) با شرایط مرزی همگن به کار برده می‌شود و جواب‌ها با شرایط مربوطه به‌دست می‌آیند.

با فرض این که $y(x,t)$ جوابی از مسأله (۱.۲)-(۲.۲) باشد، می‌توان نوشت،

$$y_{xx}(x^*,t) + p(t)y(x^*,t) + g(x^*,t) = \psi'(t), \qquad 0\le t\le T,$$

همچنین با درنظر گرفتن شرط انتگرال

$$\int_0^1 K(x)(y_{xx} + p(t)y + g(x,t))dx = \chi'(t), \qquad 0\le t\le T. \tag{۴.۲}$$

لذا داریم

$$p(t) = \frac{\psi'(t) - y_{xx}(x^*,t) - g(x^*,t)}{\psi(t)}, \qquad 0 \le t \le T, \tag{۵.۲}$$

و به‌طور مشابه برای شرط اضافی به فرم (۳.۲) می‌توان نوشت:

$$p(t) = \frac{\chi'(t) - \int_0^1 K(x)y_{xx}dx - \int_0^1 K(x)g(x,t)dx}{\chi(t)}, \qquad 0 \le t \le T. \tag{۶.۲}$$

فرض کنیم $Y(t) = [x \longmapsto y(x,t)]$ و $G(t) = [x \longmapsto g(x,t)]$. مسأله مقدار اولیه زیر را در نظر می‌گیریم،

$$\begin{aligned} Y_t =& \quad AY + F(t,Y), \qquad (x,t) \in \Omega_T, \\ Y(0) =& \qquad Y_0, \qquad 0 \le x \le 1, \end{aligned} \tag{۷.۲}$$

که در آن A یک عملگر خطی بی‌کران است (در این جا A مشتق دوم در جهت x می‌باشد) و

$$F(t,Y) : [0,T] \times X \longrightarrow Y,$$
$$F(t,Y) = p(t)Y + G(t),$$

تابع غیرخطی از متغیرهای t و $Y(t)$ می‌باشد و $p(t)$ با رابطه (۵.۲) یا (۶.۲) به‌دست می‌آید. در این رابطه، X فضای جواب مسأله (۱.۲) می‌باشد.

۱.۲ روش جداسازی عملگر در این بخش مسأله مقدار اولیه (۷.۲) را روی بازه $[0,T]$ در نظر می‌گیریم. فرض کنیم $Y_n \approx Y(t^n)$ جواب عددی در زمان $t^n = n\tau$ و با طول گام τ باشد، در این صورت با به‌کارگیری روش جداسازی لی، زیرمسائل زیر را روی هر زیربازه $[t^n, t^{n+1}]$ در نظر می‌گیریم،

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} &= Av, \qquad v(t^n) = Y_n, \\ \frac{\partial w}{\partial t} &= F(t,w), \qquad w(t^n) = v(t^{n+1}), \end{aligned} \tag{۸.۲}$$

یا

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} &= F(t,w), \qquad w(t^n) = Y_n, \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= Av, \qquad v(t^n) = w(t^{n+1}). \end{aligned} \tag{۹.۲}$$

زیرمسائل فوق می‌توانند به صورت کارا حل شوند که در آن Y_n تقریب جداسازی در $t = t^n$ می‌باشد. با به‌کارگیری الگوریتم های عددی برای حل زیرمسائل (۹.۲)، جواب می‌تواند به صورت زیر به‌دست بیاید،

$$w(t^{n+1}) = \psi_\tau w(t^n), \qquad w(t^n) = Y_n,$$
$$v(t^{n+1}) = \phi_\tau v(t^n), \qquad v(t^n) = w(t^{n+1}),$$

که در آن زیر مسائل جداسازی با شرایط اولیه به هم مربوط می‌شوند. بنابراین جواب تقریبی به صورت $Y_{n+1} = \phi_\tau\psi_\tau(Y_n)$ می‌باشد.

۳. روش جداسازی عملگر برای حل مسأله منبع معکوس سهموی

در این بخش روش جداسازی عملگر لی برای محاسبه جواب‌های عددی در هر گام زمانی به کار می‌رود. با فرض مقادیر تقریبی $u_{sp}(x,t)$ روش جداسازی عملگر در n–امین گام، مقادیر $p(t)$ با استفاده از شرایط اضافی به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$p(t) = \frac{\psi'(t) - y_{xx}(x^*,t) - g(x^*,t)}{\psi(t)}, \qquad 0 \le t \le T, \tag{۱.۳}$$

یا

$$p(t) = \frac{\chi'(t) - \int_0^1 K(x) y_{xx} dx - \int_0^1 K(x) g(x,t) dx}{\chi(t)}, \qquad 0 \le t \le T, \tag{۲.۳}$$

که در آن $y(x,t)$ جواب مسأله متناظر با شرایط مرزی همگن می‌باشد. در نتیجه با استفاده از مقادیر محاسبه شده $p(t)$ در n–امین گام زمانی، زیرمسائل (۹.۲) به صورت زیر تعریف می‌شوند

$$w_t = F(t,w) = p(t)w + g(x,t), \;\; t^n \le t \le t^{n+1}, \;\; w(x,t^n) = u_{sp}(x,t^n), \tag{۳.۳}$$

و

$$v_t = Av = \partial_x^2 v, \qquad t^n \le t \le t^{n+1}, \qquad v(x,t^n) = w(x,t^{n+1}), \tag{۴.۳}$$

که در آن $n = 0,1,2,\cdots N-1$ و N تعداد نقاط شبکه در بعد زمان است. زیرمسائل فوق برای محاسبه مقادیر تقریبی $u_{sp}(x,t)$ در $(n+1)$–امین گام زمانی حل می‌شوند.

۱.۳ تبدیلات فوریه برای حل زیرمسائل جداسازی برای حل زیرمسائل (۳.۳)–(۴.۳) با شرایط مرزی متناوب، تبدیل فوریه سریع به کار برده می‌شود. هم چنین در موردی که شرایط مرزی دیریکله و نامتناوب باشند، روش تبدیل فوریه سینوسی استفاده می‌شود. تبدیل فوریه کسینوسی نیز می‌تواند برای شرایط مرزی نیومن و نامتناوب استفاده شود.

مسأله مقدار اولیه (۳.۳)-(۴.۳) روی دامنه $[0,1] \times [0,T]$ را در نظر بگیرید. با فرض این که شرایط مرزی متناوب باشند، تابع $w(x,t)$ به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$w(x,t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{w}_k(t) e^{ik\pi x}, \tag{۵.۳}$$

که در آن $\hat{w}_k$ ضرایب فوریه به صورت زیر هستند:

$$\hat{w}_k(t) = \int_0^1 w(x,t) e^{-ik\pi x} dx. \tag{۶.۳}$$

فرض کنیم شبکه یکنواخت از $M+1$ نقطه به صورت زیر را داشته باشیم،

$$x_j = \frac{j}{M}, \qquad j = 0, 1, \cdots, M.$$

با شرایط مرزی تناوبی، داریم $w(x_M,t) = w(x_0,t)$. بنابراین $w(x,t)$ در نقاط x_j می‌تواند به صورت زیر تقریب زده شود،

$$w(x_j,t) = \sum_{k=0}^{M-1} \hat{w}_k(t) e^{ik\pi j/M}, \tag{۷.۳}$$

که در آن

$$\hat{w}_k(t) = \frac{1}{M} \sum_{j=0}^{M-1} w(x_j,t) e^{-ik\pi j/M}. \tag{۸.۳}$$

این رابطه تبدیل فوریه گسسته تابع $w(x,t)$ نامیده می‌شود و می‌تواند برای محاسبه مقادیر تقریبی $w(x,t)$ به‌کار برده شود.

مقدار w_0 را به‌عنوان جواب اولیه معادله‌ی (۳.۳) در زمان ثابت t^n در نظر بگیرید که برابر مقدار اولیه Y_0 می‌باشد. با به‌کارگیری تبدیل فوریه سریع، داریم

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \sum_{k=0}^{M-1} \hat{w}_k(t) e^{ik\pi x} = p(t) \sum_{k=0}^{M-1} \hat{w}_k(t) e^{ik\pi x} + \sum_{k=0}^{M-1} \hat{g}_k(t) e^{ik\pi x}, \\ \hat{w}_k(0) = \hat{w}_{0k}, \end{aligned} \tag{۹.۳}$$

و در نتیجه،

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\hat{w}_k(t) = p(t)\hat{w}_k(t) + \hat{g}_k(t), \\ \hat{w}_k(0) = \hat{w}_{0k}. \end{aligned} \tag{۱۰.۳}$$

با حل معادله (۱۰.۳) می‌توان نوشت،

$$\hat{w}_k(t) = e^{\int_0^t p(s)ds}\hat{w}_{0k} + \int_0^t e^{\int_s^t p(\sigma)d\sigma}\hat{g}_k(s)ds, \qquad k = 0, 1, \cdots, M-1, \qquad (۱۱.۳)$$

که در آن $\hat{w}_{0k}$ ضرایب فوریه $w_0(x)$ هستند و با رابطه (۸.۳) محاسبه می‌شوند و $\hat{g}_k(s)$ ضرایب فوریه تابع $g(x,s)$ می‌باشند. انتگرال‌ها در رابطه (۱۱.۳) با استفاده از قاعده سیمپسون تقریب زده می‌شوند و جواب معادله‌ی (۳.۳) محاسبه خواهد شد که یک مقدار اولیه برای معادله‌ی (۴.۳) می‌باشد، یعنی $v(x,0) = w(x,t)$.

به طور مشابه، برای محاسبه جواب معادله‌ی (۴.۳)، داریم:

$$v(x,t) = \sum_{k=0}^{M-1} \hat{v}_k(t)e^{ik\pi x}, \qquad (۱۲.۳)$$

و با جایگذاری در معادله‌ی (۴.۳)، می‌توان نوشت،

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\hat{v}_k(t) &= -k^2\pi^2\hat{v}_k(t), \\ \hat{v}_k(0) &= \hat{v}_{0k}. \end{aligned} \qquad (۱۳.۳)$$

با حل رابطه‌ی اخیر داریم،

$$\hat{v}_k(t) = e^{-k^2\pi^2 t}\hat{v}_{0k}, \qquad k = 0, 1, \cdots, M-1. \qquad (۱۴.۳)$$

بنابراین، جواب $v(x,t)$ محاسبه می‌شود که متناظر با مقدار $v(x,t^{n+1})$ می‌باشد. با به‌کارگیری فرمول جداسازی عملگر لی، داریم:

$$y(x,t^{n+1}) = v(x,t^{n+1}),$$

و مقادیر $u_{sp}(x,t)$ در $(n+1)$-امین گام به صورت

$$u_{sp}(x,t^{n+1}) = y(x,t^{n+1}) + z(x,t^{n+1})$$

محاسبه خواهد شد.

برای حل مسأله منبع معکوس فرضی با شرایط مرزی دیریکله و نامتناوب

$$u(.,t) = 0, \qquad (x,t) \in \partial\Omega \times [0,T],$$

تبدیل فوریه سینوسی و برای شرایط مرزی نیومن

$$\frac{\partial u}{\partial x}(.,t) = 0, \qquad (x,t) \in \partial\Omega \times [0,T],$$

تبدیل فوریه کسینوسی به کار می رود (مرجع [۲۳] را ببینید).

مسأله (۳.۳) را روی $\Omega_T = \Omega \times [0,T]$ با شرایط اولیه و مرزی مفروض در نظر می‌گیریم. با استفاده از سری فوریه سینوسی، جواب می‌تواند به صورت زیر نوشته شود،

$$w(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \hat{w}_k(t) \sin(k\pi x), \tag{۱۵.۳}$$

که به صورت زیر تقریب زده می‌شود،

$$w(x,t) = \sum_{k=1}^{M} \hat{w}_k(t) \sin(k\pi x), \tag{۱۶.۳}$$

و در آن $\hat{w}_k$ ضرایب فوریه است و داریم $w(x,0) = w_0$. در رابطه‌ی اخیر تبدیل فوریه سینوسی به صورت زیر خواهد بود،

$$\hat{w}_k(t) = 2\int_0^1 w(x,t)\sin(k\pi x)dx. \tag{۱۷.۳}$$

در نتیجه با جای‌گذاری (۱۶.۳) در رابطه‌ی (۳.۳) می‌توان نوشت،

$$\sum_{k=1}^{M} \frac{d}{dt}\hat{w}_k(t)\sin(k\pi x) = p(t)\sum_{k=1}^{M}\hat{w}_k(t)\sin(k\pi x) + \sum_{k=1}^{M}\hat{g}_k(t)\sin(k\pi x), \tag{۱۸.۳}$$
$$\hat{w}_k(0) = \hat{w}_{0k},$$

که به رابطه‌ی زیر منجر می‌شود،

$$\frac{d}{dt}\hat{w}_k(t) = p(t)\hat{w}_k(t) + \hat{g}_k(t), \qquad \hat{w}_k(0) = \hat{w}_{0k}. \tag{۱۹.۳}$$

جواب معادله‌ی اخیر می‌تواند به صورت زیر نوشته شود،

$$\hat{w}_k(t) = e^{\int_0^t p(s)ds}\hat{w}_{0k} + \int_0^t e^{\int_s^t p(\sigma)d\sigma}\hat{g}_k(s)ds, \qquad k = 1,2,\cdots,M, \tag{۲۰.۳}$$

که در آن $\hat{w}_{0k}$ ضرایب فوریه تابع $w_0(x)$ هستند که با رابطه‌ی (۱۷.۳) محاسبه می‌شوند. انتگرال‌ها در رابطه‌ی (۲۰.۳) با استفاده از فرمول سیمپسون تقریب زده می‌شوند. لذا جواب معادله‌ی (۳.۳) محاسبه می‌شود که یک مقدار اولیه برای (۴.۳) می‌باشد، یعنی $v(x,0) = w(x,t)$.

به طور مشابه، برای محاسبه‌ی جواب معادله‌ی (۴.۳)، داریم

$$v(x,t) = \sum_{k=1}^{M} \hat{v}_k(t)\sin(k\pi x), \tag{۲۱.۳}$$

و ضریب فوریه ی $\hat{v}_k(t)$ با رابطه‌ی زیر به دست می آید،

$$\hat{v}_k(t) = 2\int_0^1 v(x,t)\sin(k\pi x)dx. \qquad (۲۲.۳)$$

با جایگذاری (۲۱.۳) در معادله‌ی (۴.۳) داریم،

$$\frac{d}{dt}\hat{v}_k(t) = -k^2\pi^2\hat{v}_k(t), \qquad (۲۳.۳)$$
$$\hat{v}_k(0) = \hat{v}_{0k},$$

که در آن، جواب به صورت زیر محاسبه می‌شود،

$$\hat{v}_k(t) = e^{-k^2\pi^2 t}\hat{v}_{0k}, \qquad k = 1, 2, \cdots, M. \qquad (۲۴.۳)$$

در نتیجه $v(x,t)$ محاسبه می‌شود که متناظر با $v(x,t^{n+1})$ می‌باشد. با استفاده از فرمول جداسازی لی، داریم

$$y(x,t^{n+1}) = v(x,t^{n+1}),$$

و در نتیجه مقادیر $u_{sp}(x,t)$ در $(n+1)$-امین گام محاسبه می‌شوند.

۴. نتایج عددی

در این بخش برای ارزیابی صحت روش جداسازی عملگر به مرور چندین مثال عددی می پردازیم و هم چنین زیرمسائل با استفاده از تبدیل فوریه حل می‌شوند. روش تبدیل فوریه سینوسی برای بسط جواب معادلات (۳.۳)-(۴.۳) به کار برده می‌شوند و جواب‌ها در فضای فوریه در $(n+1)$-امین گام زمانی محاسبه می‌شوند. برای اثبات کارایی روش جداسازی عملگر لی، نتایج عددی را برای مقادیر مختلف τ و h محاسبه کرده ایم.

فرض کنیم X فضای جواب مسأله (۱.۱)-(۳.۱) با شرایط اضافی مفروض به فرم (۴.۱) یا (۵.۱) باشد که یک فضای باناخ است (مرجع [۱۲] را ببینید). برای جواب تقریبی $u_{sp}(x,t)$ روی فضای باناخ X نرم جواب‌ها به صورت زیر محاسبه می‌شود،

$$\|e_j\|_X = \|u(x_i,T) - u_{sp}(x_i,T)\|_X\,, \qquad (۱.۴)$$

که در آن e_j متناظر با τ_j ، $(1 \le j \le J)$ می‌باشد و $u_{sp}(x_i,T)$ جواب تقریبی محاسبه شده با استفاده از روش جداسازی در مسأله معکوس می‌باشد.

در این قسمت نرم ماکزیمم خطا به صورت زیر تعریف می‌شود،

$$L^\infty - \text{norm} = \max_{1\le i\le M}|u(x_i,T) - u_{sp}(x_i,T)|, \qquad (۲.۴)$$

و مرتبه محاسباتی روش پیشنهادی عبارتست از،

$$\frac{\log(\frac{\|e_j\|}{\|e_{j+1}\|})}{\log(\frac{\tau_j}{\tau_{j+1}})}.$$

هم چنین خطای پارامتر منبع در زمان انتهایی به صورت $e_p(T) = |p(T) - P(T)|$ تعریف می‌شود که در آن $P(T)$ جواب تقریبی است.

مثال ۱.۴. مسأله (۱.۱)-(۴.۱) روی دامنه‌ی $\Omega_T = [0,1] \times [0,1]$ با داده های مفروض زیر را در نظر می‌گیریم،

$$f(x,t) = -(1-e^{4t})(e^{-\frac{\pi^2}{4}t}\cos(\frac{\pi}{2}x)),$$

$$u_0(x) = \cos(\frac{\pi}{2}x),$$

$$g_1(t) = e^{-\frac{\pi^2}{4}t}, \qquad g_2(t) = 0,$$

$$x^* = \frac{1}{2}, \qquad E(t) = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi^2}{4}t},$$

و جواب‌های دقیق عبارتند از،

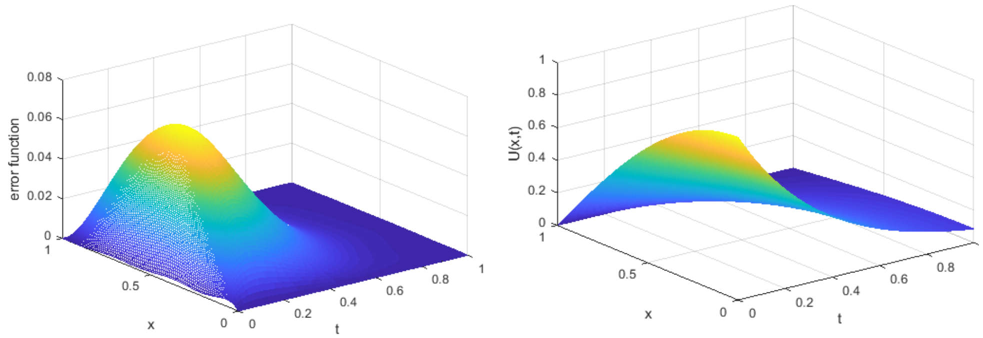
$$u(x,t) = e^{-\frac{\pi^2}{4}t}\cos(\frac{\pi}{2}x), \qquad p(t) = 1 - e^{4t}.$$

در این مثال، خطای پارامتر منبع در زمان انتهایی به ازای مقادیر $h = \tau = 0.01$ عبارتست از 1.76×10^{-3}. نرم ماکزیمم خطا و مرتبه محاسباتی روش جداسازی عملگر لی در جدول ۱ در زمان انتهایی T برای $h = 0.01$ و مقادیر مختلف τ محاسبه شده‌اند.

جدول ۱. نرم ماکزیمم خطا و مرتبه محاسباتی روش جداسازی لی در مثال ۱.۴ برای $h = 0.01$ و مقادیر مختلف τ

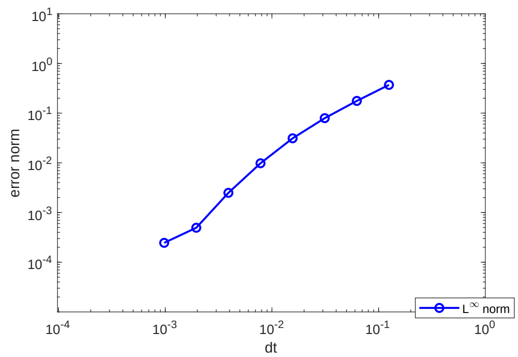
τ	روش تبدیل فوریه	
	نرم ماکزیمم	مرتبه محاسباتی
$\frac{1}{8}$	0.3708	
$\frac{1}{16}$	0.1765	1.0712
$\frac{1}{32}$	0.0793	1.1537
$\frac{1}{64}$	0.0312	1.3469
$\frac{1}{128}$	0.0098	1.6681
$\frac{1}{256}$	0.0025	1.9784
$\frac{1}{512}$	0.0005	2.3326
$\frac{1}{1024}$	0.0002	1.0092

شکل ۱ جواب‌های تقریبی $u_{sp}(x,t)$ و تابع خطای مربوط به روش جداسازی عملگر را در دامنه‌ی $\{(x,t) : 0 \le x \le 1, 0 \le t \le 1\}$ برای $h = 0.01$ و $\tau = \frac{1}{1024}$ نشان می دهد.



(ب) (آ)

شکل ۱. جواب‌های تقریبی $u_{sp}(x,t)$ (آ) و تابع خطای مربوطه (ب) در مثال ۱.۴ برای $h = 0.01$ و $\tau = \frac{1}{1024}$



شکل ۲. نرم خطا در مثال ۱.۴ برای $h = 0.01$ و مقادیر مختلف τ

نرم ماکزیمم خطا با استفاده از روش جداسازی عملگر لی در شکل ۲ و به ازای مقادیر مختلف طول گام زمانی نشان داده شده‌اند. در این شکل می‌توان دید که با کاهش طول گام زمانی، نرم خطا نیز کاهش می یابد که بیانگر همگرایی روش پیشنهادی می‌باشد. مقایسه نتایج حاصل با موارد مشابه در مراجع [۱۱] و [۱] بیانگر برتری روش فعلی می‌باشد. در این مراجع روش تحلیل هموتوپی و روش کرانک نیکلسون برای حل مسأله (۱.۱)–(۴.۱) بکار برده شده است و کمینه مقدار نرم ماکسیمم خطا 10^{-3} می‌باشد. هم چنین در مراجع ذکر شده نرخ همگرایی در مثال‌های عددی بررسی نشده است. هم چنین با توجه به بکارگیری روش جداسازی عملگر، هر زیر مسأله با روش بهینه متناظر با عملگر موجود حل می‌شود و لذا زمان محاسباتی بکار رفته در روش پیشنهادی کمتر است.

مثال ۲.۴. مسأله (۱.۱)–(۴.۱) را روی دامنه‌ی $\Omega_T = [0,1] \times [0,1]$ با داده های زیر در نظر می‌گیریم،

$$f(x,t) = ((t-1)\sin(x) + (1-2t)\frac{1}{2}x\sin(x))e^{-t^3-t^2-1},$$

$$u_0(x) = -\frac{1}{2}\sin(x)e^{-1},$$

$$g_1(t) = 0, \qquad g_2(t) = -\frac{1}{2}\sin(1)e^{-t^3-t^2-1},$$
$$x^* = \frac{1}{2}, \qquad E(t) = -\frac{1}{2}\sin(\frac{1}{2})e^{-t^3-t^2-1},$$

و جواب‌های دقیق عبارتند از،

$$u(x,t) = -\frac{1}{2}\sin(x)e^{-t^3-t^2-1}, \qquad p(t) = -3t^2 - 1.$$

روش جداسازی لی برای حل این مثال استفاده می‌شود و با استفاده از روش تبدیل فوریه زیرمسائل جداسازی حل می‌شوند. در جدول ۲ ، مقادیر نرم ماکزیمم خطا برای جواب‌های $u_{sp}(x,t)$ در زمان انتهایی به ازای $h = 0.01$ و مقادیر مختلف τ ارائه شده‌اند که بیان گر کارایی و توانایی روش جداسازی لی برای تولید جواب‌های تقریبی با دقت بالا می‌باشد.

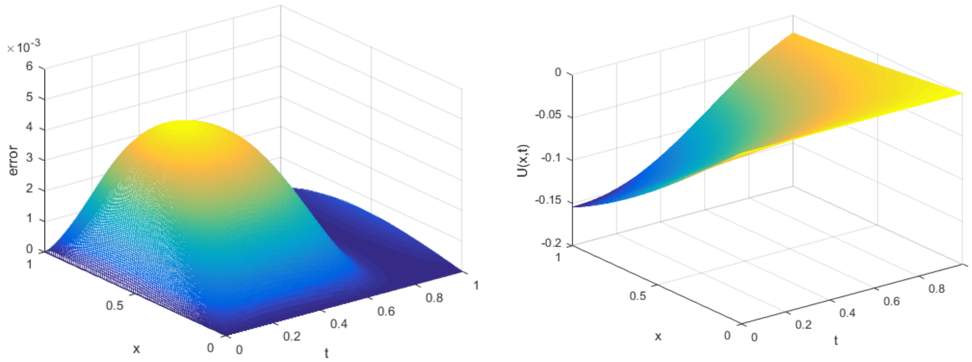
جدول ۲. نرم ماکزیمم خطا و مرتبه محاسباتی در مثال ۲.۴ برای $h = 0.01$ و مقادیر مختلف τ

τ	روش تبدیل فوریه	
	نرم ماکزیمم	مرتبه محاسباتی
$\frac{1}{8}$	0.2026	
$\frac{1}{16}$	0.1005	1.0893
$\frac{1}{32}$	0.0495	1.0543
$\frac{1}{64}$	0.0240	1.0430
$\frac{1}{128}$	0.0113	1.0468
$\frac{1}{256}$	0.0049	1.0587
$\frac{1}{512}$	0.0018	1.0784
$\frac{1}{1024}$	0.0005	1.1074

شکل ۳ جواب‌های تقریبی و تابع خطای مربوطه در دامنه $\{(x,t) : 0 \le x \le 1, 0 \le t \le 1\}$ را نشان می دهد. خطای پارامتر منبع در زمان انتهایی با مقادیر $h = 0.01$ و $\tau = \frac{1}{1024}$ عبارتست از 0.5×10^{-4}.
مقادیر نرم خطا برای جواب‌های $u_{sp}(x,t)$ در زمان انتهایی روی فضای باناخ X در شکل ۴ آورده شده است. همانطور که مشاهده می‌شود با افزایش تعداد نقاط شبکه، مقادیر نرم خطا کاهش می یابد. مقایسه نتایج حاصل با موارد مشابه در مراجع [۱۱] و [۱] بیانگر برتری روش فعلی می‌باشد. در این مراجع روش تحلیل هموتوپی و روش کرانک نیکلسون برای حل مسأله (۱.۱)–(۴.۱) بکار برده شده است و کمینه مقدار نرم ماکسیمم خطا 10^{-3} می‌باشد. همچنین در مراجع ذکر شده نرخ همگرایی در مثال‌های عددی بررسی نشده است.

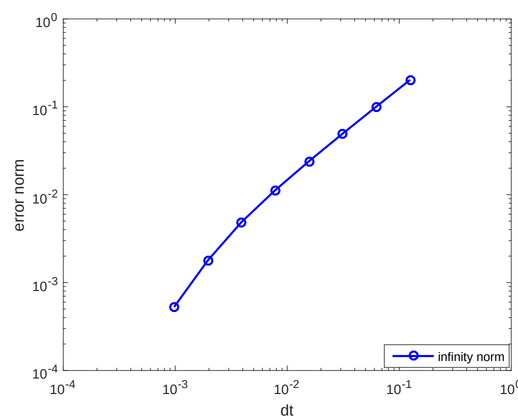
مثال ۳.۴. مسأله (۱.۱)–(۳.۱) و (۵.۱) را روی دامنه $\Omega_T = [0,1] \times [0,T]$ و با داده‌های زیر در نظر بگیرید،

$$f(x,t) = e^{-t}(-2\cos(x) - (1+t^2)(x-1)\sin(x)),$$
$$u_0(x) = (x-1)\sin(x),$$



(ب) (آ)

شکل ۳. جواب‌های تقریبی $u_{sp}(x,t)$ (آ) و تابع خطای مربوطه (ب) در مثال ۲.۴ برای $h = 0.01$ و $\tau = \frac{1}{1024}$



شکل ۴. نرم خطا در مثال ۲.۴ برای $h = 0.01$ و مقادیر مختلف τ

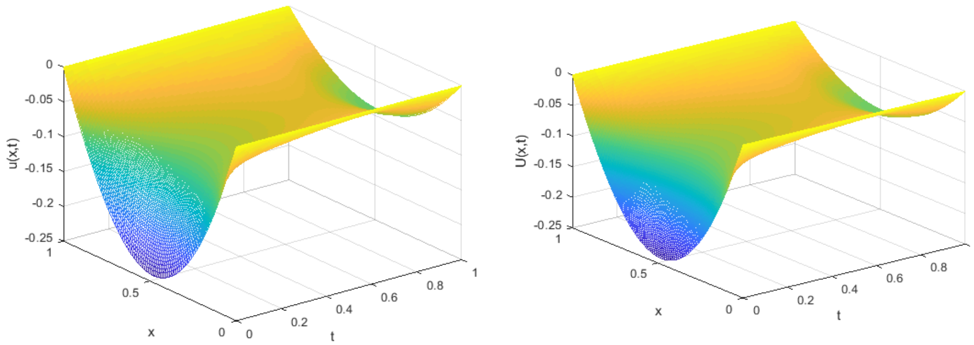
$$g_1(t) = g_2(t) = 0,$$
$$K(x) = 1, \qquad E(t) = e^{-t}(\sin 1 - 1),$$

جواب‌های دقیق عبارتند از،

$$u(x,t) = e^{-t}(x-1)\sin(x), \qquad p(t) = 1 + t^2.$$

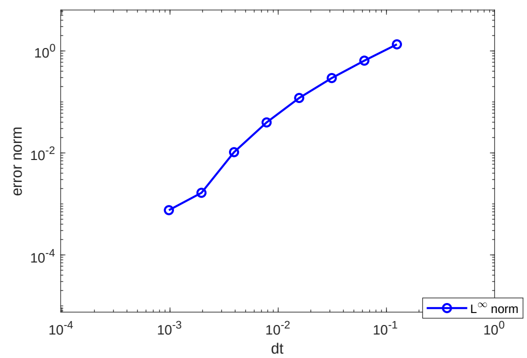
روش جداسازی لی برای $T = 1$ در این مثال به کار برده می‌شود ونتایج محاسبه می‌شوند. شکل ۵ جواب تقریبی و تابع خطای مربوطه را در زمان انتهایی به ازای $h = 0.01$ و $\tau = \frac{1}{1024}$ نشان می دهد. این نتایج صحت بالای روش را برای حل این مسأله نشان می دهد.

در این مثال، نرم خطا برای پارامتر منبع در زمان انتهایی $T = 1$ عبارتست از 3.09×10^{-4}. به علاوه نرم های مختلف خطا برای جواب‌های $u_{sp}(x,t)$ در زمان انتهایی روی فضای باناخ X در شکل ۶ آورده شده‌اند.



(ب) (آ)

شکل ۵. جواب‌های تقریبی $u_{sp}(x,t)$ (آ) و تابع خطای مربوطه (ب) در مثال ۳.۴ برای $h = 0.01$ و $\tau = \frac{1}{1024}$ در زمان $T = 1$



شکل ۶. نرم خطا در مثال ۳.۴ برای $h = 0.01$ و مقادیر مختلف τ

این نتایج برای $h = 0.01$ و مقادیر مختلف τ محاسبه شده‌اند. در این شکل با افزایش تعداد گام های زمانی، نرم خطا کاهش می یابد که همگرایی روش را نشان می دهد.

این مثال در مرجع شماره [۳۷] با استفاده از روش هم‌مکانی سینک حل شده است. در این مرجع با بکارگیری تبدیلات خاص معادله به معادله انتگرال ولترا تبدیل می‌شود و سپس با بکارگیری یک روش صریح و خصوصیات توابع سینک این معادله با یک سیستم از معادلات جبری خطی جایگزین می‌شود. مقدار نرم ماکسیمم خطا برای جواب تقریبی در مرجع [۳۷] مقدار 6×10^{-3} می‌باشد. در حالی که با استفاده از روش جداسازی عملگر مقدار متناظر عبارتست از 8×10^{-4} که بیانگر برتری روش پیشنهادی می‌باشد.

۵. نتایج

در این مقاله، روش جداسازی برای حل مسأله معکوس سهموی با شرط اضافی مورد مطالعه قرار گرفته است. برای حل این مسأله، در ابتدا با استفاده از شرط اضافی به تعیین پارامتر منبع پرداخته و سپس با جداسازی مسأله و تبدیل آن به زیرمسائل ساده تر، هر زیر مسأله با استفاده از تبدیلات فوریه حل می‌شود. درنتیجه با ترکیب جواب‌های عددی حاصل از زیرمسائل، جواب مسأله مفروض به دست می آید. نتایج حاصل

از کاربرد روش جداسازی برای حل مسأله منبع معکوس نشاندهنده کارایی و صحت روش پیشنهادی می‌باشد. هم چنین با کاهش طول گام زمانی خطا کاهش می یابد که همگرایی روش را نشان می دهد.

در کارهای آینده می‌توان از دیگر روش‌های جداسازی مانند روش جداسازی تکراری برای حل مسائل معکوس استفاده کرد. هم چنین با در نظر گرفتن مسأله در ابعاد بالاتر، می‌توان روش‌های جداسازی را برای حل آن بررسی کرد.

مراجع

[1] A. Babaei, *Solving the inverse problem of determining an unknown control parameter in a semilinear parabolic equation,* Casp. J. Math. Sci. 3 (2014), no. 2, 169–179.

[2] M. Bjørhus, *Operator splitting for abstract Cauchy problems,* IMA J. Numer. Anal. **18** (1998) 419–443.

[3] V.T. Borukhov and G.M. Zayats. *Identification of a time-dependent source term in nonlinear hyperbolic or parabolic heat equation,* Int. J. Heat Mass Transfer **91** (2015) 1106–1113.

[4] J. R. Cannon and Y. Lin, *An inverse problem of finding a parameter in a semi-linear heat equation,* J. Math. Anal. Appl. **145** (1990) 470–484.

[5] J.R. Cannon, Y. Lin and S. Wang, *Determination of source parameter in parabolic equations,* Meccanica **27** (1992) 85–94.

[6] J.R. Cannon and H.M. Yin, *On a class of nonlinear parabolic equations with nonlinear trace type functionals,* Inverse Problems **7** (1991), no.1, 149–161.

[7] J.R. Cannon and H.-M. Lin, *Numerical solutions of some parabolic inverse problems,* Numer. Methods Partial Differential Equations **6** (1990) 177–191.

[8] J. J. Cheng, and J. Liu, *An inverse source problem for parabolic equations with local measurements,* Appl. Math. Lett. **103** (2020) 106–213.

[9] D.S. Daoud, *Determination of the source parameter in a heat equation with a non-local boundary condition,* J. Comput. Appl. Math. **221** (2008) 261–272.

[10] K.L. Deckert, C.G. Maple, *Solution for diffusion with integral type boundary conditions,* Proc. Iowa Acad. Sci. **70** (1963) 354–361.

[11] M. Dehghan, *Numerical solution of one–dimensional parabolic inverse problem,* Applied Math. Comput. **136** (2003), no. 2-3, 333–344.

[12] L.C. Evans, *Partial Differential Equations,* American Mathematical Society, Providence, RI, 2010.

[13] I. Faragó, *A modified iterated operator splitting method,* Appl. Math. Model. **32** (2008) 1542–1551.

[14] J. Geiser, *Discretization methods with analytical characteristic methods and applications,* M2AN, EDP Sci. France **43** (2009) 1157–1183.

[15] D. Glotov, Dmitry, W.E. Hames, A.J. Meir and S. Ngoma, *An integral constrained parabolic problem with applications in thermochronology,* Comput. Math. Appl. **71** (2016), no. 11, 2301–2312.

[16] A. Hasanov, *An inverse source problem with single Dirichlet type measured output data for a linear parabolic equation,* Appl. Math. Lett. **24** (2011) 1269–1273.

[17] M. Hrizi, M. Hassine and R. Malek. *A new reconstruction method for a parabolic inverse source problem,* Appl. Anal. **98** (2019), no. 15, 2723–2750.

[18] N. Hryntsiv, *The inverse problem with free boundary for a weakly degenerate parabolic equation,* J. Math. Sci. **183** (2012) 779–795.

[19] N.I. Ionkin, *Solution of a boundary value problem in heat conduction with a nonclassical boundary condition,* J. Differential Equations **13** (1977) 204–211.

[20] A. Jaradat, F. Awawdeh and M.S. Md Noorani. Identification of time-dependent source terms and control parameters in parabolic equations from overspecified boundary data. J. Comput. Appl. Math. **313** (2017) 397–409.

[21] V.L. Kamynin, *The inverse problem of the simultaneous determination of the right-hand side and the lowest coefficient in a parabolic equation with many space variables,* Mat. Zametki. **97** (2015) 368–381.

[22] J. Kanney, C. Miller and C. T. Kelley, *Convergence of iterative splitting operator approaches for approximating nonlinear reactive transport problems,* Adv. Water Resources **26** (2003) 247–261.

[23] E. Kreyszig, *Advanced Engineering Mathematics,* John Wiley & Sons, 2010.

[24] P.M. Nguyen and L.H. Nguyen, *A numerical method for an inverse source problem for parabolic equations and its application to a coefficient inverse problem,* J. Inverse Ill–Posed Probl. **28** (2020), no. 3, 323–339.

[25] A.I. Prilepko, V. L. Kamynin and A.B. Kostin. *Inverse source problem for parabolic equation with the condition of integral observation in time,* J. Inverse Ill-posed Probl. **26** (2018) 523–539.

[26] S. Shekarpaz and H. Azari, *Convergence of the splitting method for inverse problems in parabolic differential equations, Dynamics of Continous,* Discerete Impulsive Systems, Series B: Application and Algorithms **24** (2017) 283–298.

[27] S. Shekarpaz and H. Azari, *An inverse problem of identifying two unknown parameters in parabolic differential equations,* Iranian J. Sci. Technol. Trans. A. Sci. **42** (2018) 2045–2052.

[28] S. Shekarpaz and H. Azari, *Splitting method for an inverse source problem in parabolic differential equations: Error analysis and applications,* Numer. Methods Partial Differential Equations **36** (2020) 654–679.

[29] A. Shidfar, A. Babaei and A. Molabahrami. *Solving the inverse problem of identifying an unknown source term in a parabolic equation,* Comput. Math. Appl. **60** (2010), no. 5, 1209–1213.

[30] A. Shidfar, R. Zolfaghari and J. Damirchi, *Application of Sinc-collocation method for solving an inverse problem,* J. Comput. Appl. Math. **233** (2009) 545 – 554.

[31] G. Strang, *On the construction and comparison of difference schemes,* SIAM J. Numer. Anal. **5** (1968) 506–517.

[32] H. F. Trotter, *On the product of semi-groups of operators,* Proc. Amer. Math. Soc. **10** (1959) 545–551.

[33] S. Wang and Y. Liu, *A finite-difference solution to an inverse problem for determining a control function in a parabolic partial differential equation,* Inverse Problems **5** (1989) 631–640.

[34] J.G. Verwer, B. Sportisse and K. Yoshida, *A note on operator splitting analysis in the stiff linear case,* Research Report, INRIA, 1998.

[35] W. Wang, B. Han and M. Yamamoto. *Inverse heat problem of determining time-dependent source parameter in reproducing kernel space.* Nonlinear Analysis: Real World Applications **14** (2013) 875–887.

[36] F. Yang and C.-L Fu, *A mollification reg0ularization method for the inverse spatial-dependent heat source problem,* J. Comput. Appl. Math. **255** (2014) 555–567.

[37] R. Zolfaghari, *Parameter determination in a parabolic inverse problem in general dimensions,* Comput. Methods Differential Equations **1** (2013) 55–70.